

## ZYLINDER- UND KEGELSCHNITTE - MOTIVIERENDE BEISPIELE

H. Vogler, Graz

### Zusammenfassung

Motivation ist die Voraussetzung für jeden ertragreichen Unterricht, denn der vielfach nur am Rande interessierte Schüler hält den Lehrstoff für irrelevant. Die ebenen Schnitte der Drehzylinder und Drehkegel gehören mit Recht zum Inhalt jedes Lehrganges aus Darstellender Geometrie und der Lehrer steht vor der Aufgabe, die Schüler dafür durch Anwendungsbeispiele zu motivieren. Solche gibt es in großer Zahl; sie stammen aus der Baukunst (Gewölbeformen) und aus der Technik (Rohrverbindungen). Geometrisch gesprochen tritt dabei das Zerfallen der Schnittkurve zweier Drehzylinder bzw. Drehkegel in zwei Kegelschnittslinien auf. Eine elementargeometrische Überlegung macht dieses Phänomen einsichtig und damit an der Höheren Schule lehrbar. Die auch zeitlich nicht aufwendige Herleitung eröffnet dem Lehrer ein weites Feld von motivierenden Beispielen, die eher auf das Interesse der Schüler hoffen dürfen als bloß "theoretische" Aufgaben.

### 1.) Vorbemerkungen

Wie bereits aus dem Titel zu entnehmen ist, hat mein Vortrag eine stark methodisch-didaktische Komponente. Mein Anliegen gilt der Motivation des Schülers durch geschickt ausgewählte Anwendungsbeispiele. Ohne Motivation geht ja ein fachlich noch so glücklicher Unterricht am Schüler nahezu spurlos vorbei. Erst Motivation, die einerseits die Neugierde des Schülers erweckt, die ihn andererseits vom außerfachlichen Wert des Lehrstoffes unmittelbar überzeugt, versetzt

ihn in eine geistige Gestimmtheit, dem vom Lehrer dargebotenen Bildungsgut näher zu treten. Fachimmanente Motivation kommt auf einer frühen Stufe des Unterrichtes in einer Wissenschaft kaum in Frage: Wie sollte auch ein Schüler für die Beschäftigung mit den als schwer, trocken, ja lebensfremd geltenden mathematischen Wissenschaften gewonnen werden, indem man ihm die Bedeutung des ihm vorgelegten Lehrstoffes für den weiteren Ausbau mathematischer Theorien vor Augen hält. Dazu müssen schon außermathematische Bereiche herangezogen werden, die der Schüler zumindest teilweise aus eigener Erfahrung kennt und in denen er vielleicht sogar schon selbst Erfahrungen gesammelt hat. Zur Motivation bieten sich im Mathematikunterricht an der AHS im Wesentlichen zwei Bezugspunkte an; die eine Gruppe betrifft die zahlreichen und vielfältigen Anwendungen im technisch-naturwissenschaftlichen Bereich. Die anderen sind merklich seltener und weit weniger bekannt; sie handeln von den Beziehungen zu den Humanwissenschaften, somit von der Wirkung der Mathematik auf unsere Kulturumwelt. Mathematik entstand ja auch aus dem Streben der Menschheit, sich die Umwelt erfaßbarer zu machen. Mathematik wurde so zu einem sehr probaten Mittel, die Umwelt nach Größe, Gestalt und Zahl zu erfassen. Dieser Zug kommt leider durch die Betonung ihrer strukturellen Natur im Unterricht neuerdings zu kurz. So betrachtet, gewinnt das Fach Darstellende Geometrie für den Unterricht an den Höheren Schulen eine neue, ausgleichende Dimension.

Dem Fachkundigen ist der wissenschaftliche Inhalt des Vortrages in wenigen Minuten zu vermitteln. Es handelt sich um das Phänomen, daß die Durchdringungskurve von zwei Drehflächen 2. Ordnung, die

derselben Kugel längs je eines Parallelkreises berührend umschrieben sind, aus zwei Kegelschnittslinien besteht. Dieser Sachverhalt ist altbekannt und wird seit langem in darstellend-geometrischen Beispielen verwendet.

Üblicherweise zieht man zum Beweis Methoden der algebraischen Geometrie heran, ohne diese Methoden selbst in Universitätsvorlesungen einwandfrei zu begründen. Man argumentiert: Die in Rede stehende Durchdringungskurve ist von 4. Ordnung und hat in den Schnittpunkten der Berührkreise der Drehflächen mit der Kugel zwei Doppelpunkte, da sich ja dort die beiden Drehflächen und die Kugel berühren. Jede Ebene, die die beiden Doppelpunkte und einen weiteren Kurvenpunkt enthält, hat im Sinne der algebraischen Wurzelzählung mit der Durchdringungskurve 5 Schnittpunkte gemeinsam und enthält deshalb eine Teilkurve der Durchdringungskurve. Als ebener Schnitt mit einer Fläche 2. Ordnung handelt es sich um eine Kegelschnittskurve, als Restschnittskurve bleibt gleichfalls eine Kurve 2. Ordnung übrig.

Diese Einsicht ermöglicht die rasche Konstruktion der Durchdringungskurve im vorliegenden Fall; die Lösung ist auf die Konstruktion ebener Schnitte zurückgespielt. Vielfältige Beispiele aus den Anwendungen - Gewölbeformen und Rohrverbindungen - betreffen die Durchdringungskurven von Drehzylindern bzw. Drehkegeln, die einer Kugel berührend längs je eines Parallelkreises umschrieben sind. Diese Beispiele sind demnach konstruktiv schon zu bewältigen, sobald im Unterricht die ebenen Schnitte dieser Flächen besprochen worden sind und der Schüler die eingangs behandelte Aussage über den Zerfall der Durchdringungskurve solcher Flächen kennt. Er lernt dabei auch ein

an und für sich interessantes und wichtiges Phänomen kennen, das der Fachmann als das Zerfallen einer algebraischen Kurve bezeichnet. Die vorhin skizzierte Begründung ist dem Schüler allerdings nicht ein-sichtig zu machen und verwirrt ihn meines Erachtens mehr als sie auch als bloß heuristische Anleitung klärt, da ja dem Schüler wichtige Begriffe - z.B. der der algebraischen Raumkurve und der ihrer Ordnung - fehlen. Eine bloße Mitteilung der Tatsache des in Rede stehenden Zerfalls der Schnittkurve 4. Ordnung reduziert den Unterricht auf die bloße Öffnung eines Kuriositätenkabinettes und vermittelt den Lehrstoff weit unter den Möglichkeiten, die er bietet. Von elementaren Herleitungen und von darauf beruhenden Anwendungsbeispielen sei im Folgenden die Rede.

2.) Ein Nachweis mittels analytischer Geometrie

Wir beziehen den euklidischen dreidimensionalen Raum auf ein kartesisches Normalkoordinatensystem  $\{O, x, y, z\}$  und beschränken uns vorerst auf die  $xz$ -Ebene. Durch

$$x^2 + z^2 = a^2 \quad (1)$$

ist ein Kreis  $k$  mit dem Radius  $a$  und dem Mittelpunkt  $O$ , durch

$$z - b = 0, \quad b \neq \pm a \quad (2)$$

eine  $x$ -parallele Gerade  $s$  in der  $xz$ -Ebene erfaßt. Die Kurven 1 des durch  $k$  und  $s$  aufgespannten Berührbüschels von Kurven 2. Ordnung - d.h. alle Kurven 2. Ordnung, die  $k$  in den auf  $s$  liegenden Punkten berühren - haben Gleichungen der Gestalt

$$x^2 + z^2 - a^2 + \lambda(z - b)^2 = 0. \quad (3)$$



Beweis: Jede Kurve  $l$  des Büschels ist zur  $z$ -Achse symmetrisch und besitzt mithin eine Gleichung in der  $x$  nur quadratisch vorkommt, also von der Form:

$$A(x^2 + z^2 - a^2) + Bz^2 + 2Cz + D = 0 \quad (4)$$

ist. Eliminiert man aus (1) und (4) die Variable  $x$ , so erhält man

$$Bz^2 + 2Cz + D = 0, \quad (5)$$

die die  $z$ -Koordinaten der Schnittpunkte von  $k$  und  $l$  liefert. Wegen der beiden auf  $s$  liegenden Berührungspunkte gilt

$$Bz^2 + 2Cz + D = \lambda(z - b)^2, \quad (6)$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Läßt man  $k$  und  $l$  um die  $z$ -Achse rotieren, so entstehen Drehflächen 2. Ordnung, und zwar erzeugt  $k$  die Kugel  $\kappa$  mit der Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad (7)$$

und  $l$  die Fläche  $\diamond$  mit der Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 + \lambda(z - b)^2 = 0.$$

Die Fläche  $\diamond$  berührt die Kugel  $\kappa$  längs des in der Ebene  $\xi$  mit der Gleichung

$$z = b \quad (8)$$

liegenden Kreises.

Ist  $\phi_i$ ,  $i = 1, 2$ , eine Drehfläche 2. Ordnung, die  $\kappa$  längs des in der Ebene  $\varepsilon_i$  liegenden Kreisbogenes  $k_i$  berührt, so hat ihre Gleichung die Form

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 + \lambda_i L_i^2 = 0, \quad i = 1, 2, \quad (9_{1,2})$$

wobei durch

$$L_i = A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0 \quad (10)$$

die Trägerebene  $\varepsilon_i$  des Berührungskreisbogenes  $k_i$  erfasst wird.

Die Punkte der Schnittkurve  $d = \phi_1 \cap \phi_2$  haben Koordinaten, die der durch Subtraktion von (9<sub>1</sub>) und (9<sub>2</sub>) gewonnenen Beziehung

$$\lambda_1 L_1^2 - \lambda_2 L_2^2 = 0 \quad (11)$$

genügen. Aus

$$\lambda_1 L_1^2 - \lambda_2 L_2^2 = (\sqrt{\lambda_1} L_1 + \sqrt{\lambda_2} L_2)(\sqrt{\lambda_1} L_1 - \sqrt{\lambda_2} L_2) = 0 \quad (12)$$

folgt, daß die Schnittkurve an die Ebene  $\phi_i$ ,  $i = 1, 2$ ,

$$\begin{aligned} \phi_1 \dots \sqrt{\lambda_1} L_1 + \sqrt{\lambda_2} L_2 &= 0 \\ \phi_2 \dots \sqrt{\lambda_1} L_1 - \sqrt{\lambda_2} L_2 &= 0 \end{aligned} \quad (12_{1,2})$$

gebunden ist. Dies ergibt den folgenden Satz:

Berühren zwei Drehflächen  $\phi_i$ ,  $i = 1, 2$ , von zweiter Ordnung eine Kugel  $\kappa$  längs je eines Kreisbogenes, so zerfällt ihre Durchdringungskurve in zwei ebene Schnitte von  $\phi_1$  bzw.  $\phi_2$ .

Anmerkung 1: Die analytische Herleitung macht auch Sonderfälle einsichtig, die auftreten, wenn  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$  parallel oder sogar identisch sind.

Anmerkung 2: Die vorgeführte Rechnung ist wohl mit den an der Höheren Schule vermittelten Kenntnissen gerade noch zu bewältigen, eignet sich jedoch höchstens für Neigungsgruppen aus Darstellender Geometrie. Deshalb soll im Folgenden von elementargeometrischen Überlegungen die Rede sein.

### 3.) Schnittkurve von zwei kongruenten Drehzylindern mit schneidenden Achsen.

Zum Verständnis für das Folgende wird beim Schüler vorausgesetzt, daß er den Begriff der allgemeinen Zylinderfläche kennt und um die perspektiv-affine Beziehung zwischen zwei allgemeinen ebenen Schnitten dieser Flächen weiß. Es wird weiters angenommen, daß er mit den Kreiszylindern vertraut ist, also zwischen dem geraden Kreiszylinder - dem Drehzylinder - und dem schiefen Kreiszylinder unterscheiden kann. Er muß auch wissen, daß die allgemeinen ebenen Schnitte der Kreiszylinder Ellipsen sind, und mit den elementargeometrischen und affinen Eigenschaften der Ellipsen, sowie den darauf beruhenden Konstruktionen vertraut sein.

Beispiel: Wir betrachten zwei kongruente Drehzylinder  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  mit schneidenden Achsen  $a_1$  und  $a_2$ . Sind  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  die Symmetrieebenen von  $a_1$  und  $a_2$ , so führt die Spiegelung an  $\sigma_1$  beide Zylinder  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  ineinander über. Die Schnittellipse  $e_1$  von  $\zeta_1$  mit  $\sigma_1$  gehört mithin auch dem Zylinder  $\zeta_2$  an und ist somit ein Bestandteil der Gesamtdurchdringungskurve von  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$ . Gleiches gilt für die Schnittellipse von  $\zeta_1$  und  $\sigma_2$ . Die beiden Schnittpunkte C und D von  $e_1$  und  $e_2$

liegen auf einer Normalen  $n$  zur Verbindungsebene  $\pi$ ,\*) der Achsen  $a_1$  und  $a_2$ ;  $n$  trifft  $\pi$  im Achsenschnittpunkt  $A = a_1 \cap a_2$ . Beide Zylinder haben weiters in C und D jeweils dieselbe Tangentialebene, berühren sich also doppelt.

Anmerkungen: Der Wert dieses Beispiels besteht gerade darin, daß dem Schüler das Zerfallen der Schnittkurve auf eine ihm einsehbare Weise begründet werden kann.

Es läßt sich auch ganz einfach verständlich machen, daß die Zylinder  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  außer den Ellipsen  $e_1$  und  $e_2$  keine Punkte gemeinsam haben. Jede Erzeugende von  $\zeta_1$  schneidet ja  $\zeta_2$  höchstens in zwei Punkten; da sie auch die Ebene  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  in je einem Punkt trifft, müssen ihre Durchstoßpunkte mit  $\zeta_2$  den Ebenen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ , also den Ellipsen  $e_1$  und  $e_2$  angehören.

#### 4.) Anwendung von Gewölbeformen

Die folgenden Beispiele sind Anwendungen bzw. Weiterentwicklungen der unter 3.) gelösten Aufgabe, die Durchdringungskurve von 2 kongruenten Drehzylindern mit schneidenden Achsen zu bestimmen. Da es sich dabei um häufig auftretende Gewölbeformen handelt, gehören sie zum Erfahrungsbereich des Schülers und geben so eine Motivation, sich mit den ebenen Schnitten von Zylinderflächen zu beschäftigen. Beziehungen zur Baukunst und zur Kunstgeschichte liegen auf der Hand. Selbstverständlich kann man mit demselben Recht auch Rohrverbindungen verwenden; da diese häufig herange-

---

\*)  $\pi$  wird zweckmäßigerweise als Grundrißebene gedeutet. Aus Platzmangel wurde auf die Wiedergabe der einfachen Konstruktionszeichnung verzichtet.

zogen werden, kam es mir darauf an, eine Lanze für die Gewölbeformen zu brechen. Durch den Bezug zur Kulturmilieu kann auch eine Motivation technisch kaum interessierter Schüler erwartet werden.

Beispiel 1: Abb. 1a zeigt ein Kreuzgewölbe, Abb. 2a ein Klostergewölbe. Beide überdecken einen quadratischen Grundriß; die Gewölbeebenen liegen auf kongruenten Drehzylindern mit orthogonal schneidenden Achsen. Die Gewölberippen sind kongruente Halbellipsen. Das Kreuzgewölbe besteht aus 4 "Stirnteilen", das Klostergewölbe aus 4 "Wangenteilen". Die an beiden Gewölben zusammen genommen, materiell vorhandenen Teile ergeben die kompletten oberen Hälften der an der Durchdringung beteiligten Drehzylinder.

Anmerkung: Abb. 3 zeigt die Überdeckung eines regelmäßigen Fünfecks durch Teile von 5 kongruenten Drehzylindern, deren Achsen sich im Mittelpunkt des Fünfecks schneiden. Da benachbarte Drehzylinder durch Spiegelung ineinander übergehen, liegen die Gewölberippen auf Ellipsen. Man erkennt, daß jedes regelmäßige Vieleck durch ein Kreuz- oder Klostergewölbe überdeckt werden kann. Abb. 4b zeigt die Überdeckung eines regelmäßigen Achtecks durch ein Klostergewölbe. (Die Beleuchtung wird durch 8 zylindrische Stichkappen ermöglicht. Dadurch entsteht eine auch in der modernen Kirchenarchitektur verwendete Gewölbeform.).

Beispiel 2: Abb. 1b und 2b illustrieren die Überdeckung von rechteckigen Grundrissen durch ein Kreuz- bzw. Klostergewölbe. Dabei geht man von Drehzylindern mit Basiskreisen über den kürzeren Rechteckseiten aus und ermittelt die über den Diagonalen liegenden elliptischen Gewölberippen; letztere liegen

auf elliptischen Zylindern mit Basisellipsen über den längeren Seiten des Rechtecks. Eine Variante entsteht, indem man von Drehzylindern ausgeht, deren Basiskreise über den längeren Rechtecksseiten liegen.

Beispiel 3: Abb. 5a zeigt die Überdeckung eines quadratischen Grundrisses durch ein Kreuzgewölbe mit steigendem Stich. Das Gewölbe besteht aus Teilen von 4 kongruenten schiefen Kreiszylindern; benachbarte besitzen eine Symmetrieebene, die jeweils eine Quadratdiagonale enthält. Die Gewölberippen sind 4 Ellipsenbögen, die jeweils von konjugierten Durchmessern begrenzt werden. Abb. 5b zeigt die analoge Überdeckung eines rechteckigen Grundrisses, Abb. 4a die eines regelmäßigen Sechsecks durch ein Kreuzgewölbe mit steigendem Stich.

Beispiel 4: Abb. 6 zeigt die Überdeckung eines bloß einfach axial symmetrischen fünfeckigen Grundrisses durch ein Kreuzgewölbe mit steigendem Stich. Die Gewölbeebenen liegen auf 4 Zylindern. Man nimmt den Gewölbescheitel in der Symmetrieebene geeignet (d.h. geometrisch beliebig) an und legt die Rippen des Gewölbes in lotrechte durch den Gewölbescheitel gehende Ebenen. Aus einem passend angenommenen Zylinder lassen sich dann die übrigen konstruieren. Ein solcher Grundriß ist beispielsweise auf der Burg Lockenhaus durch ein analoges Gewölbe überdeckt. Die hier gegebene Lösung ist allerdings der Wirklichkeit gegenüber vereinfacht.

Die angeführten Beispiele erheben keinen Anspruch auf eine vollständige Wiedergabe der Formenwelt aller aus dem einfachsten Kreuz- oder Klostergewölbe über



einem quadratischen Grundriß herleitbaren Gewölbeformen; sie wollen als Beispiele verstanden sein und zu weiteren Entdeckungsreisen anregen.

Bemerkung: Bei der Überdeckung eines quadratischen Grundrisses durch ein Kreuzgewölbe mit steigendem Stich (Abb. 5a) liegen die Gewölbeteile auf 4 kongruenten schiefen Kreiszyllindern; benachbarte besitzen eine lotrechte Symmetrieebene, die eine Diagonale des Basisquadrates enthält. Aus diesem Grunde treten ja 4 Viertelellipsen als Gewölberippen auf. Für geometrisch interessierte Leser sei die vollständige Durchdringungskurve von zwei zu einer Ebene - etwa der Aufrißebene  $\pi_2$  - symmetrisch liegenden schiefen Kreiszyllindern mit elementaren Methoden näher untersucht (Abb. 7).

Die Schnittellipse beider Zylinder  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  mit der Aufrißebene heiße  $k_1$ ; die Umriss erzeugenden  $u_i$  und  $v_i$  von  $\zeta_i$  überdecken sich im Aufriß; es gilt  $u_1^* = v_1^*$  und  $u_2^* = v_2^*$ . Um Punkte der Durchdringungskurve zu ermitteln, verwendet man zweitprojizierende Hilfsebenen  $\eta$ , die zu den Erzeugenden beider Zylinder  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  parallel sind; es gilt also  $\eta'' \parallel u_1'' \parallel v_1''$ . Die Ebene  $\eta$  schneidet - bei geeigneter Wahl - jeden Zylinder  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  nach Erzeugendenpaaren, die zusammen einen zu  $\pi_2$  symmetrischen Rhombus mit den Ecken ACBD bilden. Ein Gegeneckenpaar fällt auf  $k_1$ ; die Aufrisse des zweiten Gegeneckenpaares in den Halbierungspunkt von AB.

Die gemeinsamen Punkte von  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  - sofern sie nicht auf  $k_1$  liegen - gehören mithin einer zweitprojizierenden Ebene  $\varphi$  an, deren Aufriß  $\varphi''$  der zur Richtung  $u_1''$  konjugierte Durchmesser von  $k_1$  ist. Auch hier besteht die vollständige Durchdringungskurve aus 2 Ellipsen,  $k_1$  und  $k_2$ , die in Ebenen  $\pi_2$  und  $\varphi$  liegen.

5.) Ein elementarer Beweis für das Zerfallen der Durchdringungskurve zweier Drehkegel, die derselben Kugel berührend umschrieben sind.

Die folgenden Überlegungen stammen aus einer kleinen Note, die in japanischer Übersetzung im "Journal of Graphic Science of Japan", Bd. 25, p 21 - 23 erschienen ist.

Wir legen die Achsen  $a_i$  ( $i = 1, 2$ ) der beiden Drehkegel  $\gamma_i$  ( $i = 1, 2$ ) mit Scheiteln  $S_i$  in die Grundrißebene  $\pi_1$ . Der Punkt  $O = a_1 \cap a_2$  sei Mittelpunkt einer Kugel  $u$ , die beide Drehkegel längs je eines Parallelkreises  $b_i$  ( $i = 1, 2$ ) berührt; sie liegen in erstprojizierenden Ebenen  $\epsilon_i$  ( $i = 1, 2$ ). Die Umriss erzeugenden  $v_i$  und  $w_i$  von  $\gamma_i$  berühren den in  $\pi_1$  liegenden Umrisskreis  $u_1$  von  $u$  in den Schnittpunkten  $V_i \in v_i$  bzw.  $W_i \in w_i$  von  $\epsilon_i'$  mit  $u_1$  (Abb. 1). Die vier Schnittpunkte  $1 = v_1 \cap v_2$ ,  $2 = v_1 \cap w_2$ ,  $3 = v_2 \cap w_1$  und  $4 = w_1 \cap w_2$  sowie die zu  $\pi_1$  symmetrischen Schnittpunkte  $D_i$  ( $i = 1, 2$ ) der Berührkreise  $b_i$  und  $b_2$  gehören der Durchdringungskurve  $k$  der beiden Drehkegel an. Da beide Kegel zu  $\pi_1$  symmetrisch sind, gilt dies auch für ihre Durchdringungskurve  $k$ ; ihr Grundriß  $k'$  ist somit doppeltüberdeckt. Um weitere Punkte von  $k$  zu ermitteln, verwenden wir Hilfskugeln  $\bar{u}$  mit dem Mittelpunkt  $O$ ; eine solche sei durch ihren in  $\pi_1$  liegenden Umrisskreis  $\bar{u}_1$  festgelegt. Die mit einem geeigneten Radius gewählte Kugel  $\bar{u}$  schneidet  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  nach je zwei Parallelkreisen in projizierenden Ebenen  $\varphi_i$  bzw.  $\phi_i$  ( $i = 1, 2$ ) (Abb. 3). Die Schnittpunkte  $P' = \varphi_1' \cap \varphi_2'$ ,  $Q' = \phi_1' \cap \varphi_2'$ ,  $R' = \phi_2' \cap \varphi_1'$  und  $T' = \phi_1' \cap \phi_2'$  gehören dem Grundriß  $k'$  der Kurve  $k$  an. Aus elementaren Eigenschaften der konzentrischen Kreise  $u_1$  und  $\bar{u}_1$  folgen die Streckengleichheiten:  $1V_1 = 1V_2$ ,  $2V_1 = 2W_2$ ,  $3V_2 = 3W_1$  und  $4W_1 = 4W_2$ . Weiters ist  $V_1$  Halbierungspunkt der auf  $v_1$  und  $W_1$  Halbierungspunkt der auf  $w_1$  liegenden Punkte von  $\varphi_1'$  und  $\phi_1'$ . Da die auf  $v_1$  und  $w_1$  liegenden Sehnen von  $\bar{u}_1$  gleichlang sind, führt die zentrische Ähnlich-

keit mit dem Zentrum 3, die  $\epsilon'_2$  nach  $\psi'_2$  (bzw.  $\phi'_2$ ) bringt, auch  $\epsilon'_1$  in  $\psi'_1$  (bzw.  $\psi'_1$ ) und damit  $D'_1 = D'_2$  in  $R'$  (bzw.  $Q'$ ) über. Die Punkte 3,  $D'_1 = D'_2, R'$  und  $Q'$  liegen somit auf einer Geraden  $\sigma'_2$ , die auch 2 enthält. Analog zeigt man, daß auch die Punkte 1, 4,  $D'_1 = D'_2, P'$  und  $T'$  auf einer Geraden  $\sigma'_1$  liegen. Die erstprojizierenden Ebenen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  mit den Grundrissen  $\sigma_1$  bzw.  $\sigma_2$  schneiden somit  $\gamma_1$  nach Kegelschnitten  $k_1$  bzw.  $k_2$ , die auf Grund der Konstruktion auch auf  $\gamma_2$  liegen. Außerhalb von  $k_1$  und  $k_2$  kann es keine gemeinsamen Punkte von  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  geben, da ja jede Erzeugende von  $\gamma_1$  den Kegel  $\gamma_2$  höchstens in zwei Punkten schneidet, von denen je einer in der Ebene  $\sigma_1$  bzw.  $\sigma_2$  liegt.

Der angegebene Beweis gilt auch dann noch, wenn ein Drehkegel durch einen Drehzylinder ersetzt wird, der die Kugel  $\kappa$  längs eines Großkreises berührt. Treten an die Stelle beider Drehkegel Drehzylinder, die der Kugel  $\kappa$  längs je eines Großkreises berührend umschrieben sind, so folgt das Zerfallen ihrer Schnittkurve in zwei Ellipsen bekanntlich aus Symmetriegründen.

Als Anwendung zeigt Abb. 9 die Konstruktion eines Verbindungsstückes für zwei drehzylindrische Rohre  $E_1$ ,  $i = 1, 2$  mit verschiedenen Durchmessern. Ihre Achsen  $a_1$  und  $a_2$  sind in der Aufrißebene  $\pi_2$  angenommen. Ist  $\kappa_1$ ,  $i = 1, 2$  eine Kugel, die  $E_i$  längs eines Großkreises  $l_i$ ,  $i = 1, 2$  berührt, so zerfällt die Durchdringungskurve von  $E_1$  mit dem gemeinsamen Tangentialkegel  $\Delta$  beider Kugeln. Liegt der Kegelscheitel  $S$  außerhalb der Kugelmittelpunktsstrecke  $M_1M_2$ , so enthält dieser Kegel ein Verbindungsstück der Rohre, das an jedes Rohr mit einer Ellipse  $k_i$ ,  $i = 1, 2$  in Ebenen  $\epsilon_i$ ,  $i = 1, 2$  anschließt. Die Herstellung des Verbindungsstückes aus Blech kann nach seiner Abwicklung unschwer bewerkstelligt werden.

Kreuzgewölbe über  
quadratischem - rechteckigen  
Grundris

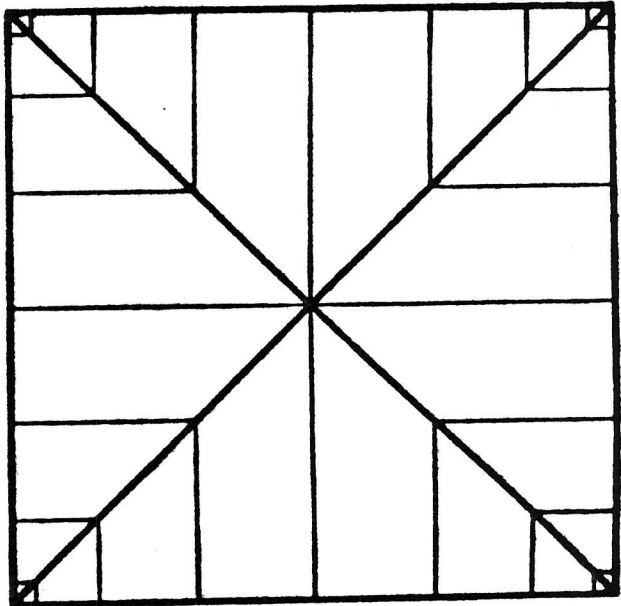
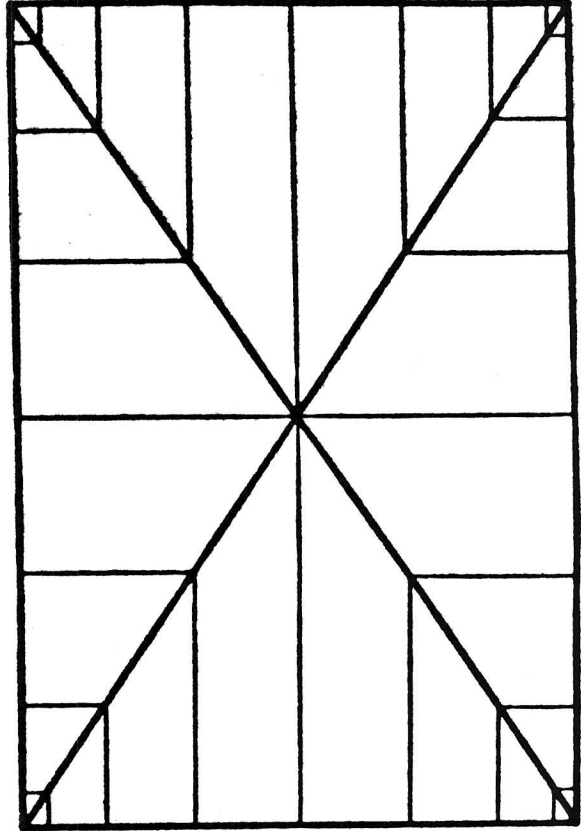
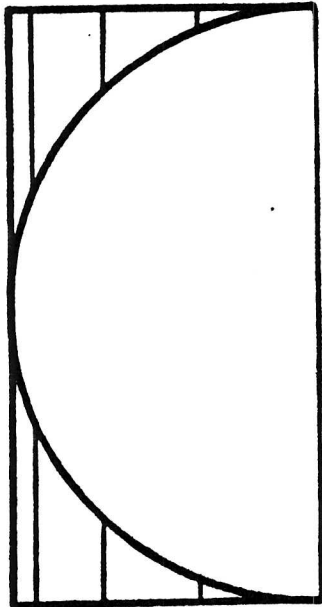
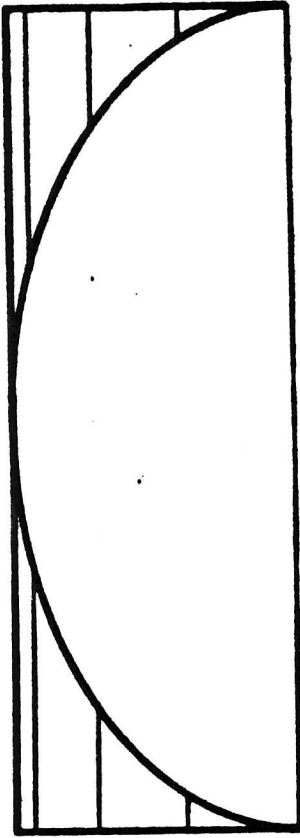


Abb. 1b

Abb. 1a

Klostergewölbe über  
quadratischem - rechteckigem  
Grundriß

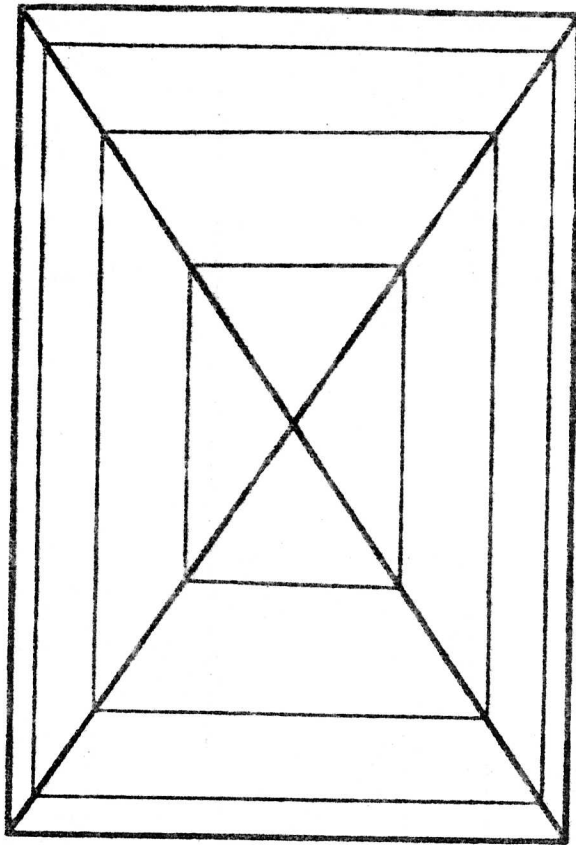
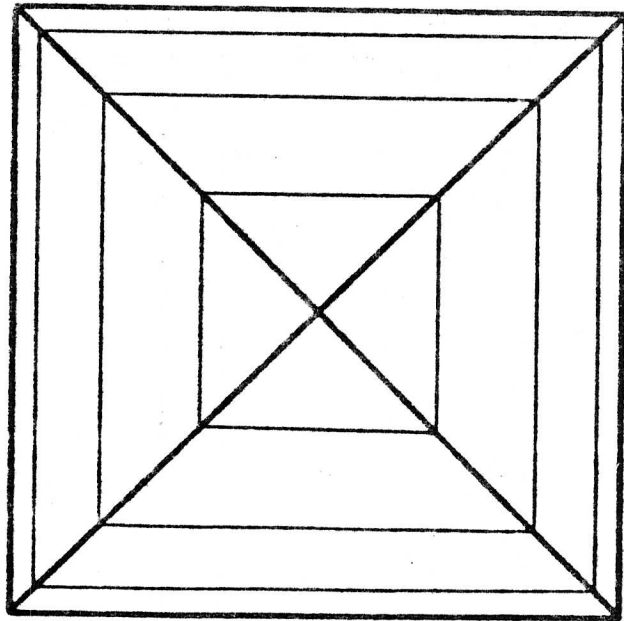
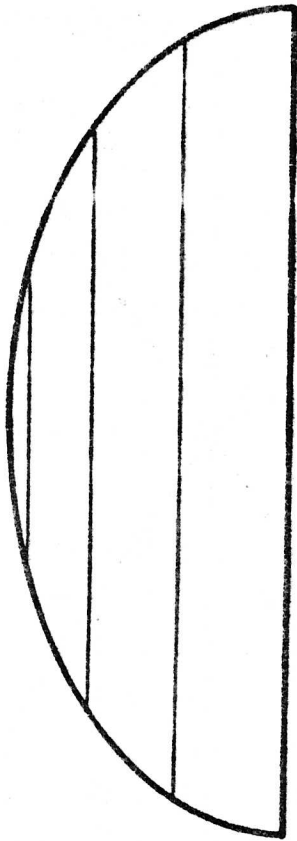
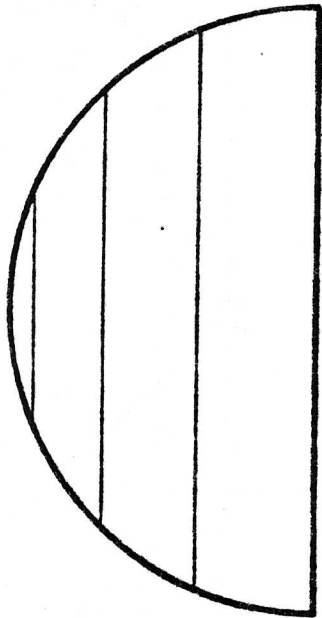


Abb. 2a

Abb. 2b

Überdeckung regelmäßiger Grundrisse I

Kreuzgewölbe über einem Fünfeck

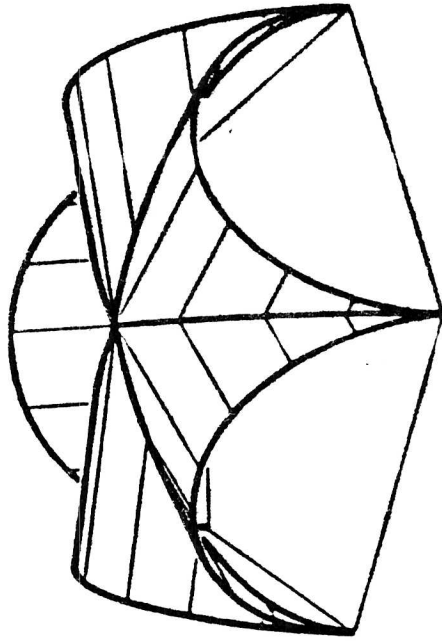
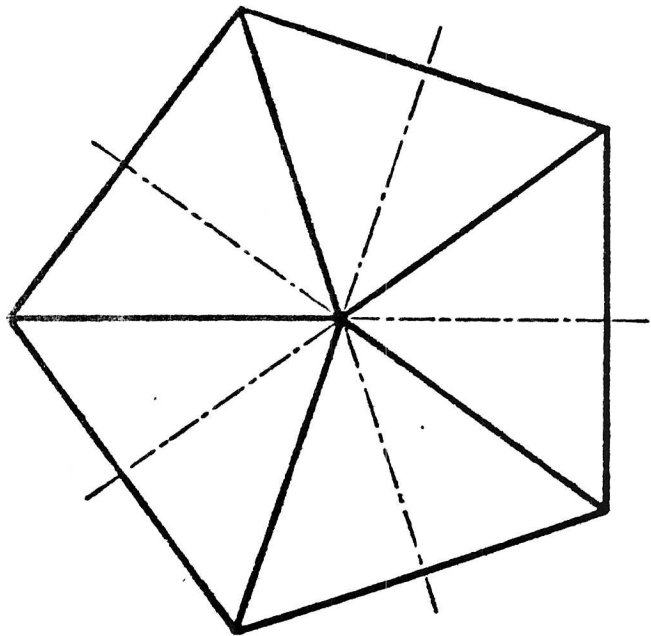
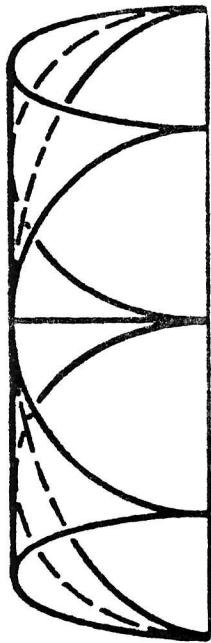
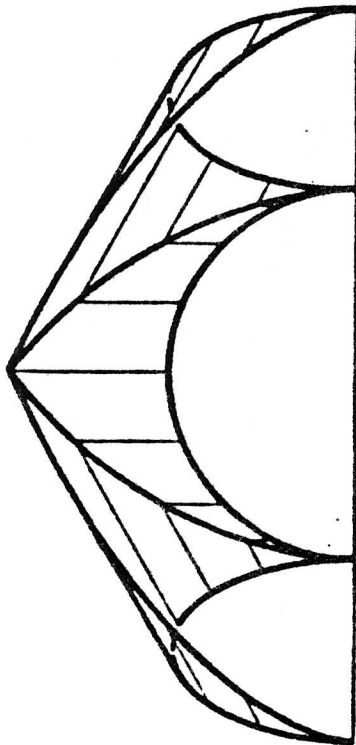


Abb. 3

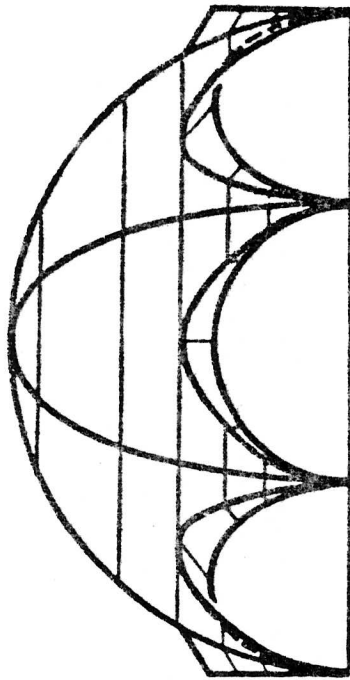


Überdeckung regelmäßiger Grundrisse II



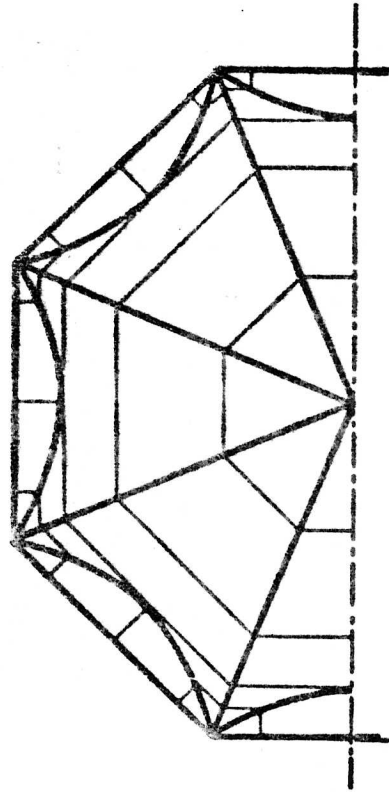
Kreuzgewölbe mit steigendem Stich  
Über einem Sechseck

Abb. 4a



Klostergewölbe mit acht Wangen und  
steigenden zylindrischen Stüchkeppen

Abb. 4b



Kreuzgewölbe mit steigendem Stich über  
quadratischem - rechteckigem  
Grundriß

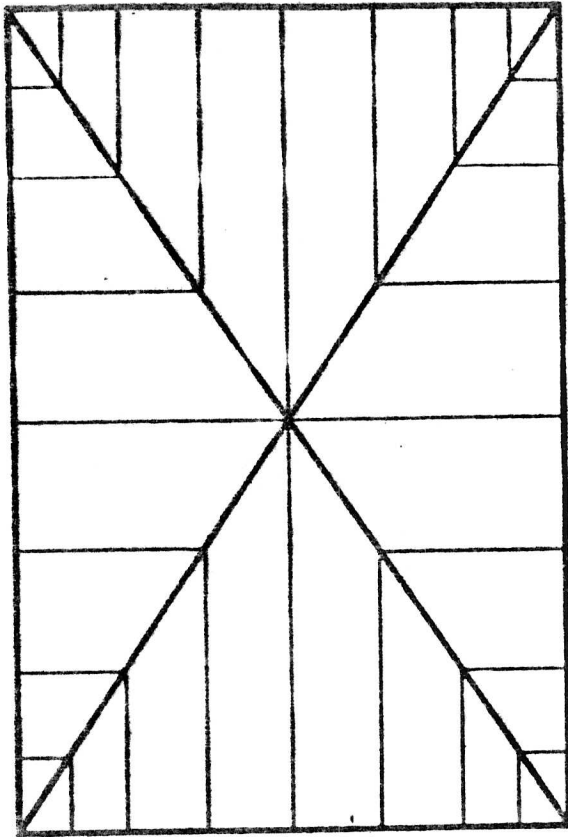
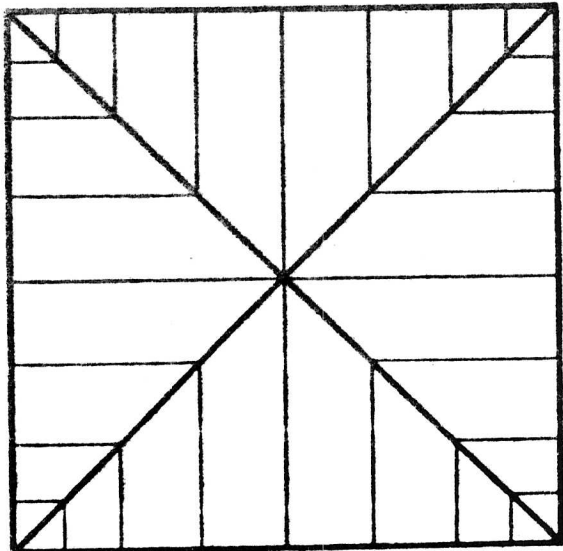
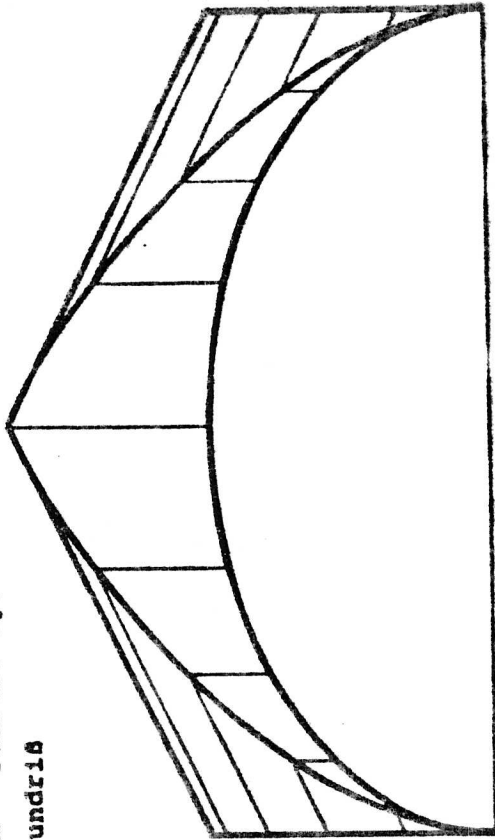
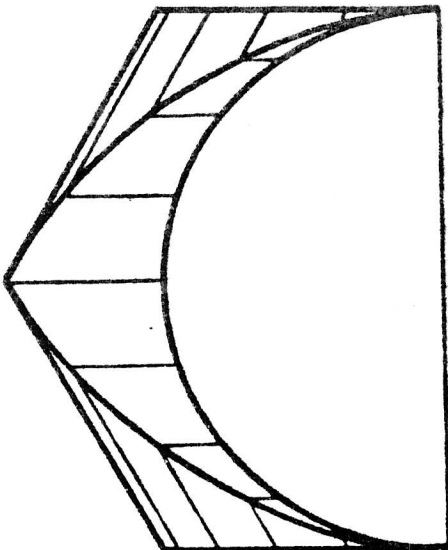


Abb. 5a

Abb. 5b

Überdeckung eines unregelmäßigen Grundrisses  
Kreuzgewölbe mit steigendem Stich über einem  
allgemeinen Fünfeck

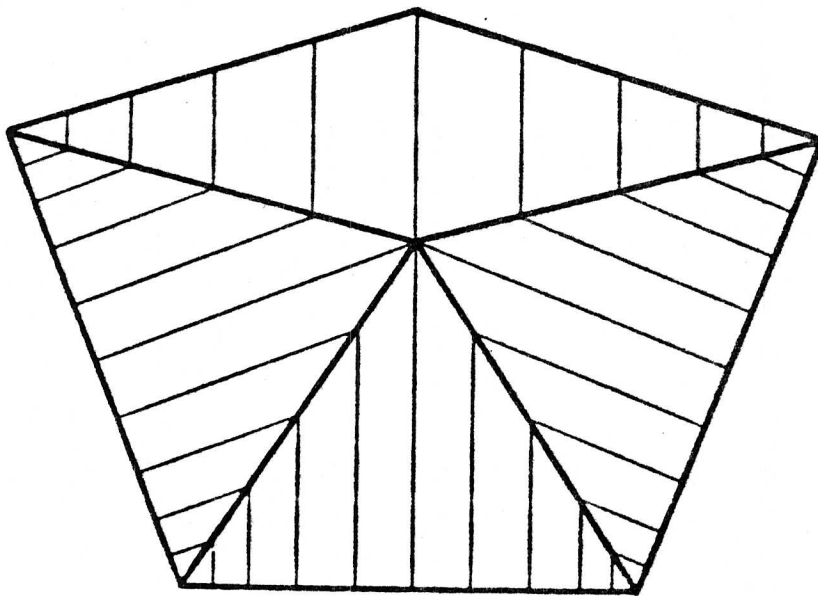
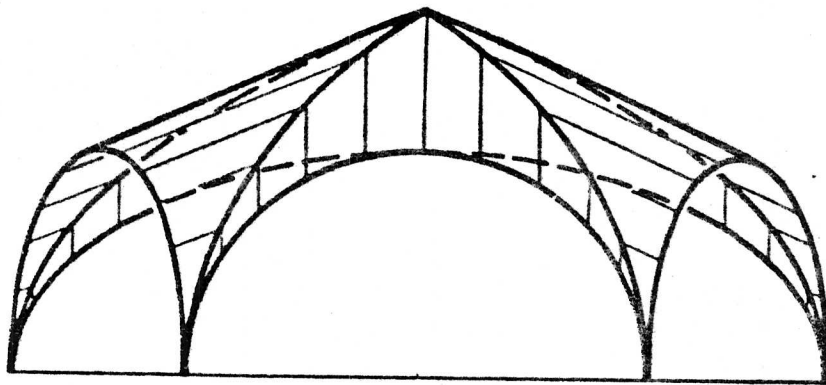


Abb. 6

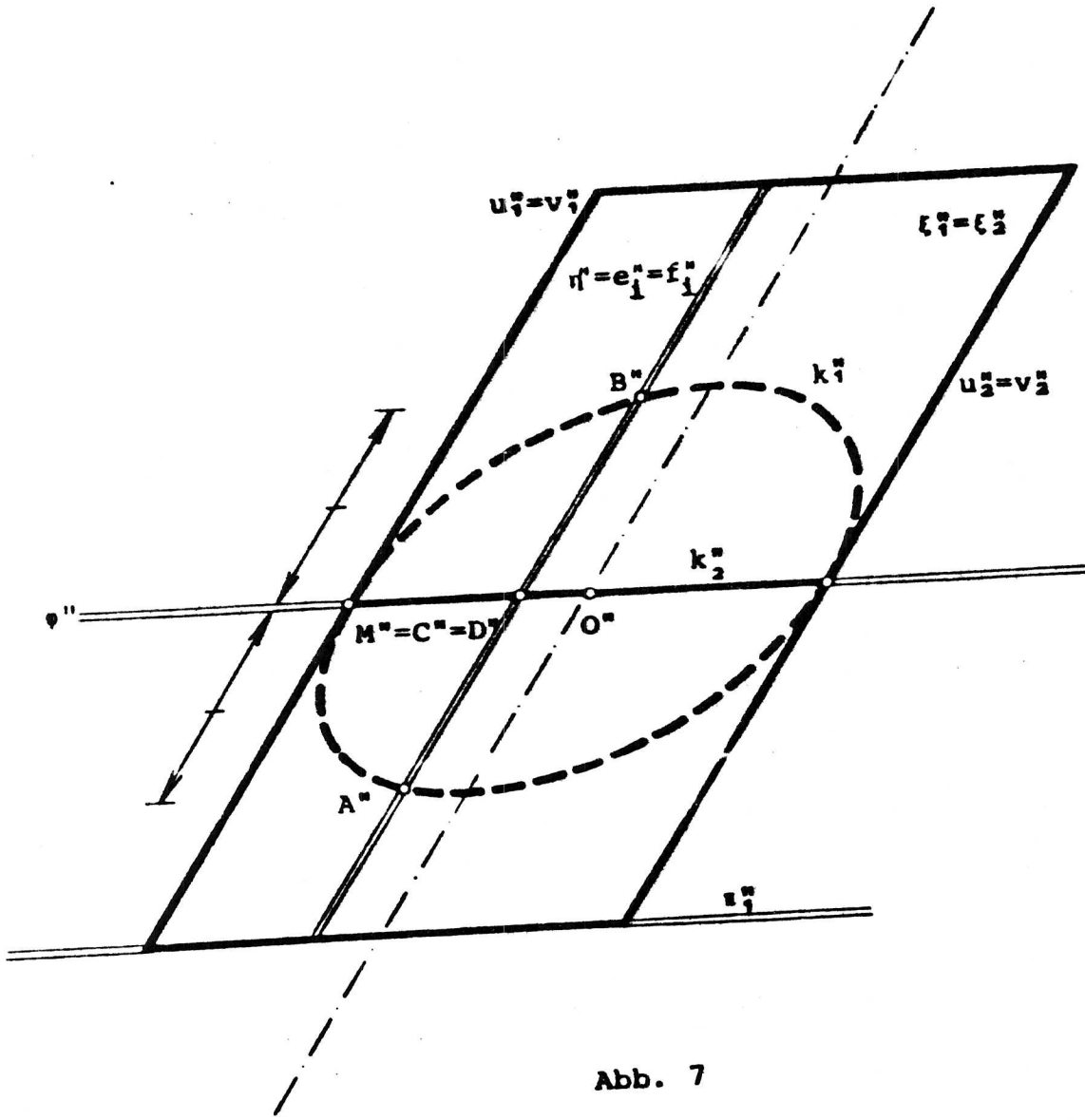


Abb. 7



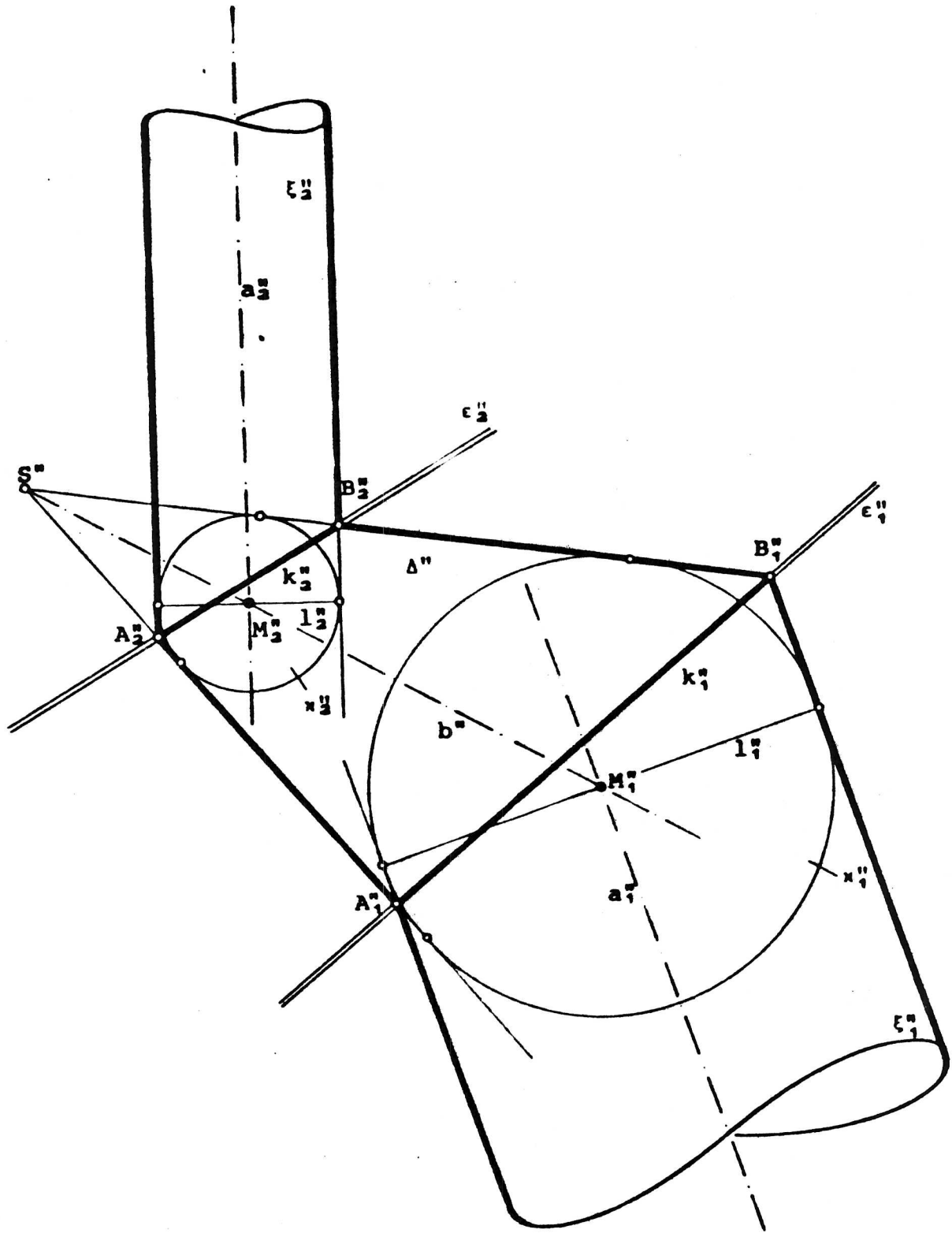


Abb. 9

Dr. H. Vogler,  
Technische Universität Graz